3.6 平面曲线的曲率

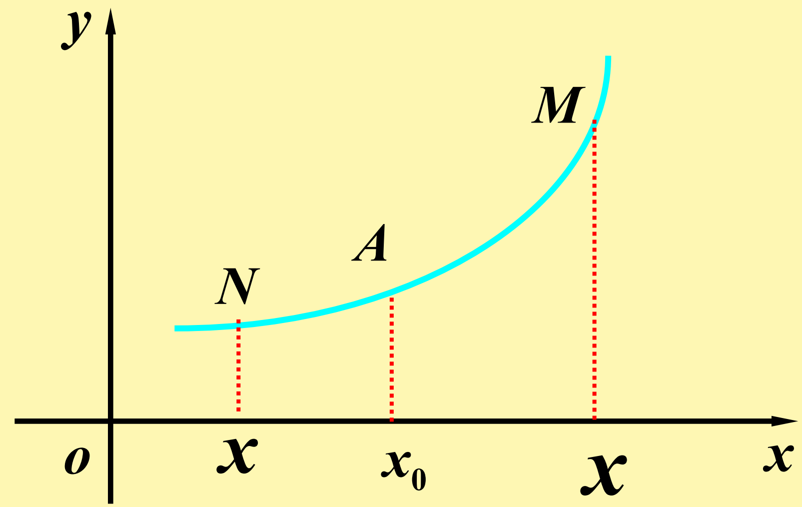
3.6.1　弧微分

3.6.2 曲率及其计算公式 （自学）

3.6.3 曲率圆与曲率半径 （自学）

3.6.1 弧微分

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.



基点：$A(x_0, y_0)$,

$M(x, y)$为任意一点,

规定:

$$\text{弧长} s = s(x) = \begin{cases} \overset{\frown}{AM} \text{ 的长度 } \left|\overset{\frown}{AM}\right| & x > x_0 \\ -\left|\overset{\frown}{AN}\right| & x < x_0 \end{cases}$$

$x_1 > x_2 \geq x_0 \quad s(x_1) > s(x_2) \geq 0$

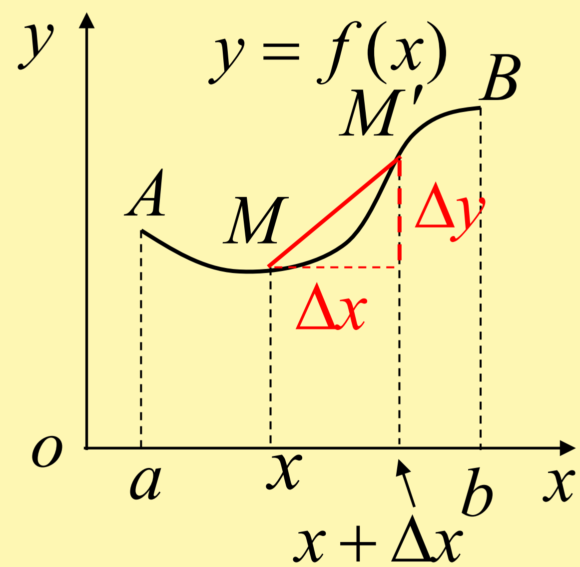
$x_1 < x_2 \leq x_0 \quad s(x_1) < s(x_2) \leq 0$

单调增函数

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > 0$$

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数,

弧长 $s=\overset{\frown}{AM}=s(x)$



$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right|^2=\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|^2\cdot\left|\frac{\overline{MM'}}{\Delta x}\right|^2$$

$$=\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|^2\cdot\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|^2=1$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}>0$$

$$s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$s'(x)=\sqrt{1+(y')^2} \qquad \therefore \quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

或 $\mathbf{d}s=\sqrt{(\mathbf{d}x)^2+(\mathbf{d}y)^2}$ 便于记忆，没有了正负号

若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

则弧长微分公式为

$$\mathbf{d}s=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

几何意义:

$M'\to M$ (即 $T\to M$) $\quad \mathrm{d}s=|MT|$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha\,; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\alpha$$